極座標変換に伴う微分方程式の特異性の回避公式について (数値解析と新しい情報技術)

数理解析研究所講究録 1362 巻 2004 年 161-168

極座標変換に伴う微分方程式の特異性の回避公式について

徳島大学・工学部　今井　仁司 (Hitoshi IMAI)
Faculty of Engineering, University of Tokushima

1. 序

極座標変換によって微分方程式に特異性が表れるのは教科書的な話である．数値シミュレーションの離散化手法として，直交座標系を必要としない有限要素法などを用いた場合は極座標変換をしなければよいのでこの特異性は問題にならないが，差分法やスペクトル法 [1] を用いた場合にはこの特異性が問題となる．ただし，差分法でも例えば円領域の数値計算をデカルト座標系で計算を行うような方法もある [6, 7]．この場合も極座標変換を行わないのでこの特異性は問題とならないが，実現されている手法は低次近似のものである．超高精度を実現するスペクトル法ではこの特異性を扱うことは本質的になる．スペクトル・ガレルキン法においては級数を制限するという特異性の回避法が提案されているが [4, 8, 11, 12]，非線形項の処理や境界条件の処理に手間がかかる．いずれにしても，円領域 (あるいはそれと同位相の領域) の数値計算を極座標系で行うことは自然であり，特異性を回避できるのであればそれに越したことはない．

以上かかげた動機は一般的な観点からのものであるが，実は個人的にはこの特異性の処理は切実な問題であった．数年前に無限精度数値シミュレーションというのを提案した [3]．これは，任意次数を容易に実現する離散化手法と多倍長演算を組み合わせた数値シミュレーションのことである．無限精度の指標としていつもとりあげている次の境界値問題：

$$u_{xx} = -\frac{\pi^2}{16}\sin\frac{(x+1)\pi}{4}, \qquad -1 < x < 1$$

$$u(-1) = 0, \qquad u_x(1) = 0.$$

に対して (厳密解は $u(x) = \sin\dfrac{(x+1)\pi}{4}$)，4GB メモリの Xeon(2GHz) のマシン 4 台と 4GB メモリの Xeon(2.4GHz) のマシン 1 台の合計 5 台 (10CPU, 20GB) をギガビットのネットワークで接続した計算機クラスターで計算すると誤差は 1.46×10^{-4995} になる．我々は，任意次数を容易に実現する離散化手法として，スペクトル選点法 [1] を特に好んで用いている．上の超高精度の数値計算は選点数を 1601 個として得られたものである．多倍長演算には FMLIB[9] を用いて有効数字を 5000 桁に設定した．このスペクトル選点法は，適用の仕方が差分法に似ているため，離散化のイメージが容易にできてアルゴリズムの開発

に適している．非線形問題にも適用しやすい．実際，自由境界問題の無限精度シミュレーションやできないと思われていた第一種積分方程式の直接シミュレーションに成功した [2, 10]．多倍長演算自体は古典的な研究分野であるが [5]，これが応用解析の分野で注目され始めたのは最近のことである．というのも計算機の能力の進歩により，それが偏微分方程式や積分方程式の数値計算に利用できるようになったからである．多倍長演算の別の可能性を示す最新の数値例を紹介しよう．区間演算にそれを応用した．性質の悪い行列として有名な Hilbert 行列に対する連立一次方程式を考え，解ベクトルの各成分の厳密値が入る区間の最大幅を調べた．行列の次数が 300 の場合，有効桁数を 3000 桁にすると区間の最大幅は 10^{-1400} 程度であったが，倍精度に相当する有効桁数 15 桁の計算では区間が 10^{1400} 程度になると推定された．区間が 1 程度で意味のない計算になるので，多倍長演算の必要性がはっきりと示されている．この研究は，今後，精度保証の高度化に役立つ．多倍長演算ライブラリとしては同じく FMLIB を用いた．以上のような非常に高度な数値シミュレーション (数値計算) では，様々な困難点を数学的に排除しないと超高精度の結果は得られない．このような困難点には計算領域に角がある場合などいろいろあるが，ここでは極座標変換の特異性をとりあげる．

2. 回避公式とその導出

2 階までの偏微分に対する特異性回避公式を 2.1 に示す．応用では 2 階までの偏微分がよく使われるのでこれだけでもかなり有用である．ちなみに，おおもとの極座標変換の公式は次であり原点 $r=0$ で特異性が見られる．

$$
\begin{aligned}
u_x(x,y) &= \cos\theta\, u_r(r,\theta) - \frac{\sin\theta}{r} u_\theta(r,\theta) \\
u_y(x,y) &= \sin\theta\, u_r(r,\theta) + \frac{\cos\theta}{r} u_\theta(r,\theta) \\
u_{xx}(x,y) &= \cos^2\theta\, u_{rr}(r,\theta) - \frac{\sin 2\theta}{r^2}\big(r\, u_{r\theta}(r,\theta) - u_\theta(r,\theta)\big) + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\big(u_{\theta\theta}(r,\theta) + r\, u_r(r,\theta)\big) \\
u_{xy}(x,y) &= \frac{\sin 2\theta}{2}\left\{u_{rr}(r,\theta) - \frac{1}{r^2}\big(u_{\theta\theta}(r,\theta) + r\, u_r(r,\theta)\big)\right\} + \frac{\cos 2\theta}{r^2}\big(r\, u_{r\theta}(r,\theta) - u_\theta(r,\theta)\big) \\
u_{yy}(x,y) &= \sin^2\theta\, u_{rr}(r,\theta) + \frac{\sin 2\theta}{r^2}\big(r\, u_{r\theta}(r,\theta) - u_\theta(r,\theta)\big) + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\big(u_{\theta\theta}(r,\theta) + r\, u_r(r,\theta)\big)
\end{aligned}
$$

2.1. 回避公式

上の公式における $r=0$ での特異性を除去した式が次である．ここで，左辺の例えば $u_x(0,\theta)$ とは，極座標平面の $(r,\theta)=(0,\theta)$ における $u_x(x,y)$ の値を示す．$r\neq 0$ では上の公式をそのまま使えばよい．

$$
\begin{aligned}
u_x(0,\theta) &= \cos\theta\, u_r(0,\theta) - \sin\theta\, u_{r\theta}(0,\theta) \\
u_y(0,\theta) &= \sin\theta\, u_r(0,\theta) + \cos\theta\, u_{r\theta}(0,\theta)
\end{aligned}
$$

$$u_{xx}(0,\theta) = u_{rr}(0,\theta) - \frac{1}{2}\sin 2\theta\, u_{rr\theta}(0,\theta) + \frac{1}{2}\sin^2\theta\, u_{rr\theta\theta}(0,\theta)$$
$$u_{xy}(0,\theta) = \frac{1}{2}\cos 2\theta\, u_{rr\theta}(0,\theta) - \frac{1}{4}\sin 2\theta\, u_{rr\theta\theta}(0,\theta)$$
$$u_{yy}(0,\theta) = u_{rr}(0,\theta) + \frac{1}{2}\sin 2\theta\, u_{rr\theta}(0,\theta) + \frac{1}{2}\cos^2\theta\, u_{rr\theta\theta}(0,\theta)$$

注意

(1) 特異性が次のように微分作用素に置き換わっているように見える．

$$\frac{1}{r} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial r}, \qquad \frac{1}{r^2} \longrightarrow \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}$$

(2) 2.2 の導出を見れば次式が成り立つことがわかる．

$$u_r(0,\theta) + u_{r\theta\theta}(0,\theta) = 0$$

なお，これは $u(x,y)$ を x,y で Taylor 展開し極座標に変換すると容易に導ける．また，似たようなより高階微分の関係式も存在する．

2.2. 回避公式の導出

まず注意しておくことは，$u(x,y)$ は x,y の関数として十分滑らかであると仮定する．結果として r,θ の滑らかな関数になる．ところが，最初に r,θ の滑らかな関数と仮定すると x,y では滑らかにならないので注意する．

準備

- $u_\theta(0,\theta) = u_{\theta\theta}(0,\theta) = (u_x)_\theta(0,\theta) = (u_y)_\theta(0,\theta) = 0$
- θを固定したとき

$$u_\theta(r,\theta) = u_\theta(0,\theta) + r\, u_{r\theta}(0,\theta) + \frac{r^2}{2}u_{rr\theta}(0,\theta) + \cdots = r\, u_{r\theta}(0,\theta) + \frac{r^2}{2}u_{rr\theta}(0,\theta) + \cdots$$
$$u_{\theta\theta}(r,\theta) = u_{\theta\theta}(0,\theta) + r\, u_{r\theta\theta}(0,\theta) + \frac{r^2}{2}u_{rr\theta\theta}(0,\theta) + \cdots = r\, u_{r\theta\theta}(0,\theta) + \frac{r^2}{2}u_{rr\theta\theta}(0,\theta) + \cdots$$

導出

(1) まず，1 階微分の式から導く．

$$u_x(0,\theta) = \lim_{r\to 0}\left(\cos\theta\, u_r(r,\theta) - \frac{\sin\theta}{r}u_\theta(r,\theta)\right) = \cos\theta \lim_{r\to 0} u_r(r,\theta) - \sin\theta \lim_{r\to 0}\frac{1}{r}u_\theta(r,\theta)$$
$$= \cos\theta\, u_r(0,\theta) - \sin\theta \lim_{r\to 0}\frac{u_\theta(r,\theta) - u_\theta(0,\theta)}{r} \qquad (\because\ u_\theta(0,\theta) = 0)$$
$$= \cos\theta\, u_r(0,\theta) - \sin\theta\, u_{r\theta}(0,\theta)$$

$$u_y(0,\theta)=\lim_{r\to0}\left(\sin\theta\, u_r(r,\theta)+\frac{\cos\theta}{r}u_\theta(r,\theta)\right)=\sin\theta\,\lim_{r\to0}u_r(r,\theta)+\cos\theta\,\lim_{r\to0}\frac{1}{r}u_\theta(r,\theta)$$

$$=\sin\theta\, u_r(0,\theta)+\cos\theta\, u_{r\theta}(0,\theta)$$

これらをθで微分して,

$$(u_x)_\theta(0,\theta)=0\text{ より}\quad \sin\theta\big(u_r(0,\theta)+u_{r\theta\theta}(0,\theta)\big)=0$$

$$(u_y)_\theta(0,\theta)=0\text{ より}\quad \cos\theta\big(u_r(0,\theta)+u_{r\theta\theta}(0,\theta)\big)=0$$

従って, 2.1 の注意 (2) の式: $u_r(0,\theta)+u_{r\theta\theta}(0,\theta)=0$ が成立する.

(2) 次に 2 階微分の公式を導くが, その前に次式が成り立つことに注意する.

$$(u_x)_r(0,\theta)=\lim_{r\to0}\frac{u_x(r,\theta)-u_x(0,\theta)}{r}$$

$$=\lim_{r\to0}\frac{1}{r}\left\{\left(\cos\theta\, u_r(r,\theta)-\frac{\sin\theta}{r}u_\theta(r,\theta)\right)-\big(\cos\theta\, u_r(0,\theta)-\sin\theta\, u_{r\theta}(0,\theta)\big)\right\}$$

$$=\cos\theta\,\lim_{r\to0}\frac{u_r(r,\theta)-u_r(0,\theta)}{r}$$

$$-\sin\theta\,\lim_{r\to0}\frac{1}{r}\left\{\frac{1}{r}\left(r\, u_{r\theta}(0,\theta)+\frac{r^2}{2}u_{rr\theta}(0,\theta)+\cdots\right)-u_{r\theta}(0,\theta)\right\}$$

$$=\cos\theta\, u_{rr}(0,\theta)-\frac{1}{2}\sin\theta\, u_{rr\theta}(0,\theta)$$

$$\lim_{r\to0}\frac{1}{r}(u_x)_\theta(r,\theta)=\lim_{r\to0}\frac{(u_x)_\theta(r,\theta)-(u_x)_\theta(0,\theta)}{r}\qquad(\because\ (u_x)_\theta(0,\theta)=0)$$

$$=\lim_{r\to0}\frac{1}{r}\left\{\left(-\sin\theta\, u_r(r,\theta)+\cos\theta\, u_{r\theta}(r,\theta)-\frac{\cos\theta}{r}u_\theta(r,\theta)-\frac{\sin\theta}{r}u_{\theta\theta}(r,\theta)\right)\right.$$

$$\left.-\big(-\sin\theta\, u_r(0,\theta)+\cos\theta\, u_{r\theta}(0,\theta)-\cos\theta\, u_{r\theta}(0,\theta)-\sin\theta\, u_{r\theta\theta}(0,\theta)\big)\right\}$$

($\because$ $u_x(r,\theta)$, $u_x(0,\theta)$ を θ で偏微分)

$$=-\sin\theta\,\lim_{r\to0}\frac{u_r(r,\theta)-u_r(0,\theta)}{r}+\cos\theta\,\lim_{r\to0}\frac{1}{r}\left(u_{r\theta}(r,\theta)-\frac{1}{r}u_\theta(r,\theta)\right)$$

$$-\sin\theta\,\lim_{r\to0}\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}u_{\theta\theta}(r,\theta)-u_{r\theta\theta}(0,\theta)\right)$$

$$= -\sin\theta\, u_{rr}(0,\theta) + \cos\theta \lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\left(u_{r\theta}(r,\theta) - \left(u_{r\theta}(0,\theta) + \frac{r}{2}u_{rr\theta}(0,\theta) + \cdots\right)\right)$$

$$- \sin\theta \lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\left(\left(u_{r\theta\theta}(0,\theta) + \frac{r}{2}u_{rr\theta\theta}(0,\theta) + \cdots\right) - u_{r\theta\theta}(0,\theta)\right)$$

$$= -\sin\theta\, u_{rr}(0,\theta) + \cos\theta \lim_{r\to 0}\left(\frac{u_{r\theta}(r,\theta) - u_{r\theta}(0,\theta)}{r} - \frac{1}{2}u_{rr\theta}(0,\theta)\right) - \frac{1}{2}\sin\theta\, u_{rr\theta\theta}(0,\theta)$$

$$= -\sin\theta\, u_{rr}(0,\theta) + \frac{1}{2}\cos\theta\, u_{rr\theta}(0,\theta) - \frac{1}{2}\sin\theta\, u_{rr\theta\theta}(0,\theta)$$

$$(u_y)_r(0,\theta) = \lim_{r\to 0}\frac{u_y(r,\theta) - u_y(0,\theta)}{r}$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\left\{\left(\sin\theta\, u_r(r,\theta) + \frac{\cos\theta}{r}u_\theta(r,\theta)\right) - \left(\sin\theta\, u_r(0,\theta) + \cos\theta u_{r\theta}(0,\theta)\right)\right\}$$

$$= \sin\theta \lim_{r\to 0}\frac{u_r(r,\theta) - u_y(0,\theta)}{r}$$

$$+ \cos\theta \lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\left\{\frac{1}{r}\left(r\, u_{r\theta}(0,\theta) + \frac{r^2}{2}u_{rr\theta}(0,\theta) + \cdots\right) - u_{r\theta}(0,\theta)\right\}$$

$$= \sin\theta\, u_{rr}(0,\theta) + \frac{1}{2}\cos\theta\, u_{rr\theta}(0,\theta)$$

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}(u_y)_\theta(r,\theta) = \lim_{r\to 0}\frac{(u_y)_\theta(r,\theta) - (u_y)_\theta(0,\theta)}{r} \qquad (\because \quad (u_y)_\theta(0,\theta) = 0)$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\left\{\left(\cos\theta\, u_r(r,\theta) + \sin\theta\, u_{r\theta}(r,\theta) - \frac{\sin\theta}{r}u_\theta(r,\theta) + \frac{\cos\theta}{r}u_{\theta\theta}(r,\theta)\right)\right.$$

$$\left. - \left(\cos\theta\, u_r(0,\theta) + \sin\theta u_{r\theta}(0,\theta) - \sin\theta\, u_{r\theta}(0,\theta) + \cos\theta\, u_{r\theta\theta}(0,\theta)\right)\right\}$$

$$= \cos\theta \lim_{r\to 0}\frac{u_r(r,\theta) - u_r(0,\theta)}{r} + \sin\theta \lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\left(u_{r\theta}(r,\theta) - \frac{1}{r}u_\theta(r,\theta)\right)$$

$$+ \cos\theta \lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}u_{\theta\theta}(r,\theta) - u_{r\theta\theta}(0,\theta)\right)$$

$$= \cos\theta\, u_{rr}(0,\theta) + \frac{1}{2}\sin\theta\, u_{rr\theta}(0,\theta) + \frac{1}{2}\cos\theta\, u_{rr\theta\theta}(0,\theta)$$

以上の式を用いると2階微分の公式の導出は容易である．

$$
\begin{aligned}
u_{xx}(0,\theta) &= \lim_{r\to 0} u_{xx}(r,\theta) = \lim_{r\to 0}\left(\cos\theta\,(u_x)_r(r,\theta) - \frac{\sin\theta}{r}(u_x)_\theta(r,\theta)\right)\\
&= \cos\theta\,(u_x)_r(0,\theta) - \sin\theta\,\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}(u_x)_\theta(r,\theta)\\
&= \cos\theta\left(\cos\theta\,u_{rr}(0,\theta) - \frac{1}{2}\sin\theta\,u_{rr\theta}(0,\theta)\right)\\
&\quad - \sin\theta\left(-\sin\theta\,u_{rr}(0,\theta) + \frac{1}{2}\cos\theta\,u_{rr\theta}(0,\theta) - \frac{1}{2}\sin\theta\,u_{rr\theta\theta}(0,\theta)\right)\\
&= u_{rr}(0,\theta) - \frac{1}{2}\sin 2\theta\,u_{rr\theta}(0,\theta) + \frac{1}{2}\sin^2\theta\,u_{rr\theta\theta}(0,\theta)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_{xy}(0,\theta) &= \lim_{r\to 0} u_{xy}(r,\theta) = \lim_{r\to 0}\left(\sin\theta\,(u_x)_r(r,\theta) + \frac{\cos\theta}{r}(u_x)_\theta(r,\theta)\right)\\
&= \sin\theta\,(u_x)_r(0,\theta) + \cos\theta\,\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}(u_x)_\theta(r,\theta)\\
&= \sin\theta\left(\cos\theta\,u_{rr}(0,\theta) - \frac{1}{2}\sin\theta\,u_{rr\theta}(0,\theta)\right)\\
&\quad + \cos\theta\left(-\sin\theta\,u_{rr}(0,\theta) + \frac{1}{2}\cos\theta\,u_{rr\theta}(0,\theta) - \frac{1}{2}\sin\theta\,u_{rr\theta\theta}(0,\theta)\right)\\
&= \frac{1}{2}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)u_{rr\theta}(0,\theta) - \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta u_{rr\theta\theta}(0,\theta)\\
&= \frac{1}{2}\cos 2\theta\,u_{rr\theta}(0,\theta) - \frac{1}{4}\sin 2\theta\,u_{rr\theta\theta}(0,\theta)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_{yy}(0,\theta) &= \lim_{r\to 0} u_{yy}(r,\theta) = \lim_{r\to 0}\left(\sin\theta(u_y)_r(r\theta) + \frac{\cos\theta}{r}(u_y)_\theta(r,\theta)\right)\\
&= \sin\theta(u_y)(0,\theta) + \cos\theta\,\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}(u_y)_\theta(r,\theta)\\
&= \sin\theta\left(\sin\theta\,u_{rr}(0,\theta) + \frac{1}{2}\cos\theta\,u_{rr\theta}(0,\theta)\right)\\
&\quad + \cos\theta\left(\cos\theta\,u_{rr}(0,\theta) + \frac{1}{2}\sin\theta\,u_{rr\theta}(0,\theta) + \frac{1}{2}\cos\theta\,u_{rr\theta\theta}(0,\theta)\right)\\
&= u_{rr}(0,\theta) + \frac{1}{2}\sin 2\theta\,u_{rr\theta}(0,\theta) + \frac{1}{2}\cos^2\theta\,u_{rr\theta\theta}(0,\theta)
\end{aligned}
$$

3. 数値計算例

2 で紹介した公式の有効性を確かめるために行った数値計算結果を紹介する．

問題 1　次を満たす $u = u(x,y)$ を求めよ．

$$\begin{aligned} \Delta u - 2u_x &= (1+4y^2)\sinh(x+y^2) && \text{in} \quad \Omega = \{(x,y) \mid x^2+y^2<1\} \\ u &= \sinh(x+y^2) && \text{on} \quad \Gamma = \{(x,y) \mid x^2+y^2=1\} \end{aligned}$$

厳密解　$u(x,y) = \sinh(x+y^2)$

差分法で数値計算するために，極座標系の問題に変換する．$u(r\cos\theta, r\sin\theta) \equiv \tilde{u}(r,\theta)$ として

問題 1′　次を満たす $\tilde{u} = \tilde{u}(r,\theta)$ を求めよ．

$$\begin{aligned} &\tilde{u}_{rr}(r,\ \theta) + \left(\frac{1}{r} - 2\cos\theta\right)\tilde{u}_r(r,\ \theta) + \frac{1}{r^2}\tilde{u}_{\theta\theta}(r,\ \theta) + \frac{2\sin\theta}{r}\tilde{u}_\theta(r,\ \theta) \\ &\quad = \left(1+4r^2\sin^2\theta\right)\sinh\left\{r(\cos\theta + r\sin^2\theta)\right\}, \qquad 0<r<1,\ 0 \leqq \theta < 2\pi \end{aligned}$$

$$\tilde{u}_{rr}(0,\theta) + \frac{1}{4}\tilde{u}_{rr\theta\theta}(0,\theta) - \cos\theta\ \tilde{u}_r(0,\theta) + \sin\theta\ \tilde{u}_{r\theta}(0,\theta) = 0, \qquad 0 \leqq \theta < 2\pi$$

$$\tilde{u}(1,\theta) = \sinh\left(\cos\theta + \sin^2\theta\right), \qquad 0 \leqq \theta < 2\pi$$

Fortran で倍精度計算を行った．差分法は 2 次精度のものを用いた．n_1 を半径方向の等分割数，n_2 を円周方向の等分割数とした．差分 I とは $r=0$ における n_2 個の格子点において，1 点だけで方程式を課して他の格子点では $\tilde{u}$ の値が同じであるとする方法である．差分 II とは $r=0$ における n_2 個の格子点において方程式を課す方法である．どちらにおいても θ 方向の周期性が考慮されている．差分 I における最大誤差 (格子点上の誤差の絶対値の最大値) を表 1 に，差分 II における最大誤差を表 2 に示す．ほぼ 2 次精度の計算ができていることがわかる．

表 1. 差分 I の最大誤差

$n_1 = n_2$	20	40	60
最大誤差	1.39×10^{-2}	4.36×10^{-3}	8.62×10^{-4}

表 2. 差分 II の最大誤差

$n_1 = n_2$	20	40	60
最大誤差	6.52×10^{-2}	4.26×10^{-3}	6.34×10^{-4}

スペクトル選点法でも計算を行ったが，差分法IIのように$r=0$で方程式をたてたのでは行列がランク落ちしてしまう．差分法Iのように方程式をたてると問題なく計算ができた．

4. 結論

本論文では，数値シミュレーションで問題となる，極座標変換による特異性を回避する公式を紹介した．実際の数値計算でその有効性を確認した．なお，本公式の導出はここで紹介したような複雑手順を踏まなくても，変数変換をうまく組み合わせることで導出できることがわかった．これは非常に見通しのよい方法であり詳細は現在準備中である．

謝辞

本論文中に紹介した数値計算結果は，徳島大学工学部の竹内敏己教授，坂口秀雄助手のご厚意による．結論で述べた変数変換による導出に関しては，京都大学理学部の西田孝明教授のアドバイスによる．以上の方々に感謝申しあげる．なお，本研究は科学研究費(13440031, 13440038, 13304007, 13555021, 14654023, 15204007)の支援を受けて行った．

参考文献

[1] C. Canuto et al., Spectral Methods in Fluid Dynamics, Springer, 1998.

[2] H. Imai and T. Takeuchi, Some Advanced Applications of the Spectral Collocation Method, GAKUTO Int. Ser. Math. Sci. Appl., **17**(2001), 323-335.

[3] H. Imai, T. Takeuchi and M. Kushida, On Numerical Simulation of Partial Differential Equations in Infinite Precision, Adv. Math. Sci. Appl., **9**(2)(1999), 1007-1016.

[4] 石岡 圭一，円盤領域の浅水方程式に対するスペクトル法 I. 原理，ながれ，**22**(2003), 345-358.

[5] D. E. Knuth, The Art of Computer Programming, Addison-Wesley, 1981.

[6] N. Matsunaga and T. Yamamoto, Convergence of Swartztrauber-Sweet's approximation for the Poisson-type equation on a disk, Numer. Funct. Anal. Optimiz., **20**(1999), 917-928.

[7] N. Matsunaga and T. Yamamoto, Superconvergence of the Shortley-Weller approximation for Dirichlet problems, J. Comp. Appl. Math., **116**(2000), 263-273.

[8] T. Matsushima and P.S. Marcus, A Spectral Method for Polar Coordinates, J. Compt. Phys., **120**(1995), 365-374.

[9] D. M. Smith, A FORTRAN Package For Floating-Point Multiple-Precision Arithmetic, Transactions on Mathematical Software, **17**(1991), 273-283.

[10] Tarmizi, T. Takeuchi, H. Imai and M. Kushida, Numerical simulation of one-dimensional free boundary problems in infinite precision, Adv. Math. Sci. Appl., **10**(2)(2000), 661-672.

[11] W.T.M. Verkley, A Spectral Model for Two-Dimensional Incompressible Fluid Flow in a Circular Basin (I. Mathematical Formulation), J. Comp. Phys., **136**(1997), 100-114.

[12] W.T.M. Verkley, A Spectral Model for Two-Dimensional Incompressible Fluid Flow in a Circular Basin (II. Numerical Examples), J. Comp. Phys., **136**(1997), 115-131.